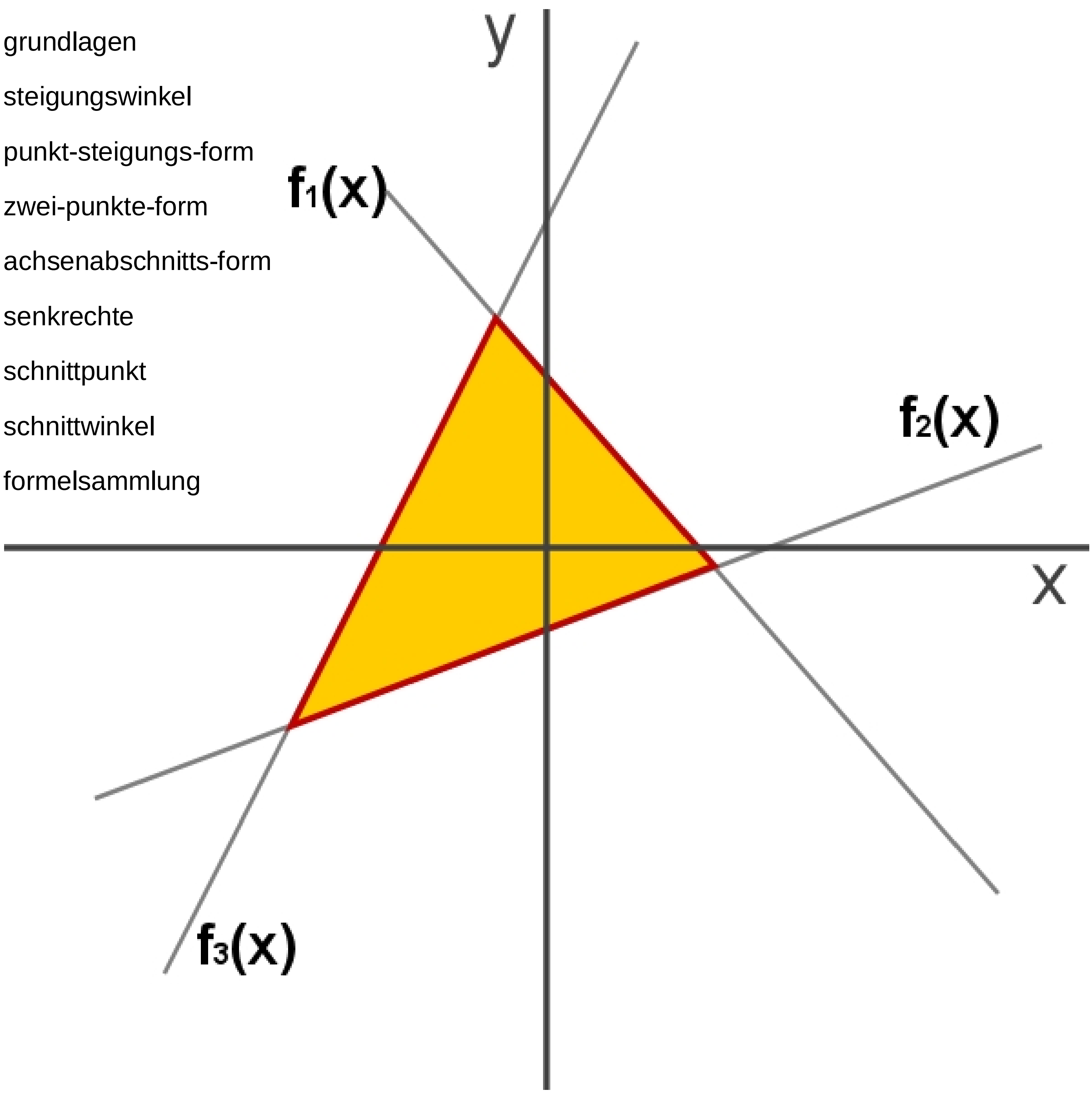

y
x
f1(x)
f2(x)
f3(x)

Grundlagen

Zur Einführung wählen wir ein typisches Beispiel aus der Praxis:

Zur Verkabelung eines kleinen Netzwerks benötigen Sie mehrere Kabel.
Im Versandhandel kostet ein Kabel 5,00€. Für den Versand werden pauschal 10,00€ berechnet.

Den Gesamtpreis können wir nun auf einfache Weise berechnen, da dieser

- von der bestellten Anzahl,
- dem Einzelpreis und
- von den Versandkosten

abhängt.

Der Mathematiker sagt: Der Gesamtpreis ist eine Funktion der Anzahl:

GesamtPreis = f (Anzahl)
Einzelpreis und Versandkosten sind konstante Werte

Die Anzahl können wir frei wählen (je nach Bedarf). Eine bestimmte Vorschrift legt fest, wie sich der Gesamtpreis berechnet.
Hier ist dies Vorschrift recht übersichtlich:

GesamtPreis = 5,00 · Anzahl + Versandkosten

oder allgemein - wie es der Mathematiker schreibt:

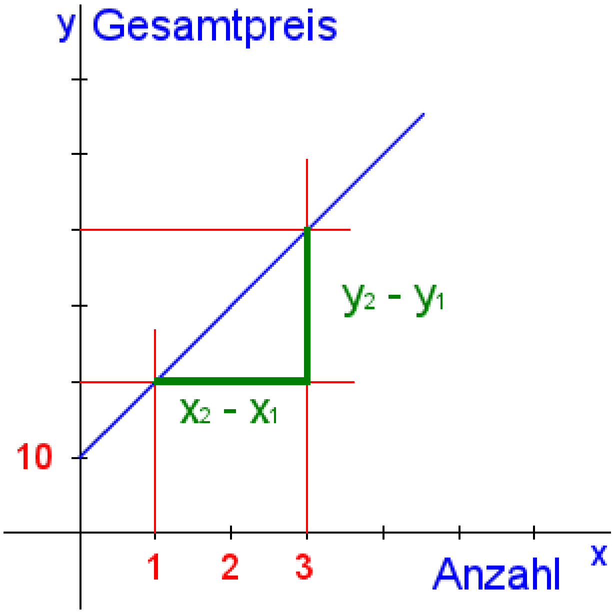
$$f(x) = y = mx + b$$

Mit jeder bestellten Einheit steigt der Gesamtpreis um 5,00€. *m* ist also ein Steig(er)ungsfaktor.
Wir stellen den Zusammenhang $y = 5x + 10$ graphisch dar:

Um aus einer Funktion einen Graphen zeichnen zu können, muss man

- entweder zwei Punkte bestimmen, zwischen denen man dann die Gerade zeichnen kann,
- oder man bestimmt einen Punkt und benutzt die Steig(er)ungsrate: 1 Einheit nach "rechts" und m Einheiten nach oben (oder unten - je nach Vorzeichen von m)

Die Ordinate (Achse der abhängigen Größe) wird für den Gesamtpreis skaliert (eingeteilt).
Die Abszisse (Achse der unabhängigen Größe) wird mit der Anzahl skaliert.



Bei Null bestellten Einheiten (ein Bisschen weltfremd – aber die Mathematik will es so...) fallen nur die 10,00€ Versandkosten an:

für x = 0 ist y = 10.

Der Graph steigt (mit wachsendem x wird auch y größer) nun gleichmäßig an (Achtung: Rabatte werden <u>nicht</u> berücksichtigt).
Die Steig(er)ung beträgt, wie bekannt, 5 € je bestellter Einheit.

Kennt man die Steigung eines Graphen nicht, z.B. wenn der Graph aus einer Wertetabelle erstellt wurde, kann man sie dennoch einfach berechnen: Wir legen zwei Werte auf der Abszisse fest (x_1 und x_2) und bestimmen graphisch durch Errichten der Senkrechten in x_1 und x_2 die Schnittpunkte mit dem

Graphen. Von diesen Schnittpunkten fällen wir jeweils das Lot auf die Ordinate und erhalten so die entsprechenden Werte y1 und y2.
Durch Differenzbildung (x_1 - x_2) bzw. (y_1 - y_2) erhalten wir *Achsenabschnitte*.

Die Achsenabschnitte (y_1 - y_2) und (x_1 - x_2) setzen wir ins Verhältnis:. $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

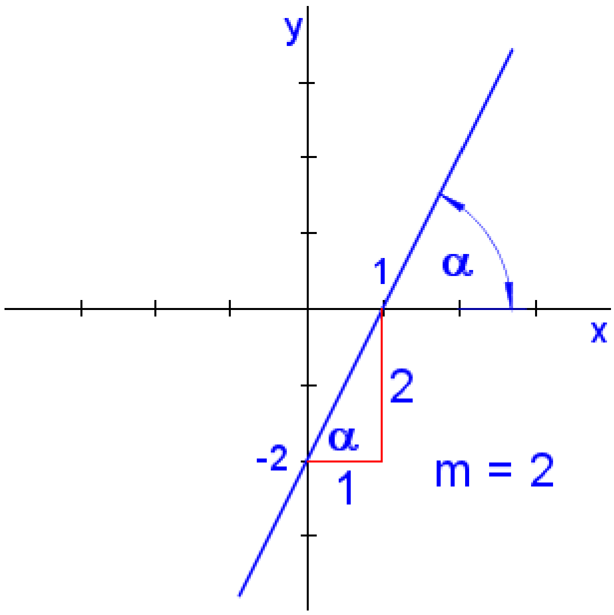
Das Verhältnis der Achsenabschnitte gibt uns die Steigung *m* des Graphen an.

Bei einer Geraden ist die Steigung überall gleich (sonst wäre es keine Gerade), d.h. wie auch immer wir (x_1 - x_2) wählen, die y-Differenz wird immer $m \cdot (x_1 - x_2)$ sein.

Steigungswinklel

Für die dargestellte Funktion gilt:

f(x) = 2x - 2



Es ist der Winkel α zu bestimmen, den der Graph der Funktion mit der Abszisse bildet.

Für das rechtwinklige Dreieck gibt es die Beziehung

$$\tan\alpha = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

Auf das Problem angewendet, ergibt sich (rotes Dreieck beachten!):

$$\tan \alpha = m$$

und nach α aufgelöst:

$$\arctan m = \alpha$$

Der dargestellte Funktionsgraph bildet einen Winkel

$$\alpha = 63{,}43°$$

mit der x-Achse (Abszisse).

Die Punkt - Steigungs - Form (PSF)

Die Punkt-Steigungs-Form kann verwendet werden, wenn ein Punkt (Px | Py) und die Steigung m gegeben sind bzw. aus der Aufgabenstellung bestimmt werden können.

Die Grundformel der Punkt-Steigungs-Form lautet:

$$m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$$

nach y aufglöst:

$$y = mx + \left(y_A - mx_A\right)$$

durch Vergleich mit der allgemeinen Geradengleichung

$$y = mx + b$$

stellen wir fest, dass

$$b = \left(y_A - mx_A\right)$$

Die Punkt - Winkel - Form als Sonderfall der PSF

Wenn an Stelle der Steigung **der Winkel gegeben** ist, schreiben wir wegen m = tan α

$$y = \tan a \cdot x + \left(y_A - \tan a \cdot x_A\right)$$

Warum braucht man überhaupt **zwei bestimmende Elemente (in der Ebene)** , um eine Gerade eindeutig festzulegen?

- Wäre nur die Steigung (in der Ebene) gegeben, so gäbe es beliebig viele Geraden, die alle die selbe Steigung haben aber parallel liegen.
- Wäre nur ein Punkt (in der Ebene) gegeben, gäbe es beliebig viele Geraden, die alle diesen Punkt enthalten aber rotationssymmetrisch bezogen auf den Punkt liegen.

Weltfremdes Beispiel zur PSF gefällig?
In einem Ort sterben jedes Jahr 200 Einwohner mehr als geboren werden. 1980 betrug die Einwohnerzahl 20000.

Die "Steigung" beträgt -200 Einwohner/Jahr. Der gegebene "Punkt" ist P(1980 | 20000).
x ist die Jahreszahl, y die Zahl der Einwohner. Die Gleichung für die "Bevölkerungsentwicklung" lautet demnach:

$$y = -200 \cdot x + 416000$$

Das heißt, zu Christi Geburt (x = 0) gab es 416000 Einwohner in diesem Ort, und im Jahr 2080 (y = 0) ist der Ort endgültig ausgestorben. So, so!

Die zwei- Punkte - Form

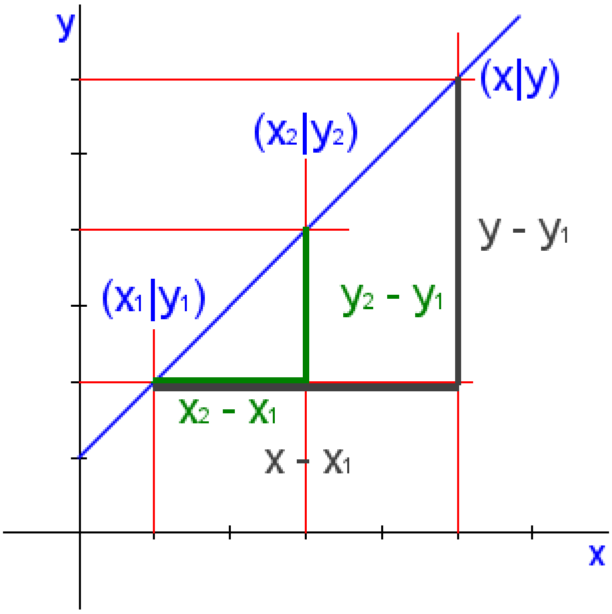
Die zwei-Punkte-Form kann verwendet werden, wenn zwei Punkte (Px_1 | Py_1) und (Px_2 | Py_2) gegeben sind bzw. aus der Aufgabenstellung bestimmt werden können.

Die Grundformel der Punkt-Steigungs-Form lautet:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

nach y aufglöst:

$$y=y_1+\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot(x-x_1)$$



Kurze Herleitung:

Die Steigung m der Geraden beträgt $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (mit den gegebenen Punkten bestimmt).

Nach dem Strahlensatz gilt aber auch. $m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$

Durch Gleichsetzen erhalten wir somit:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Die Achsenabschnitts - Form

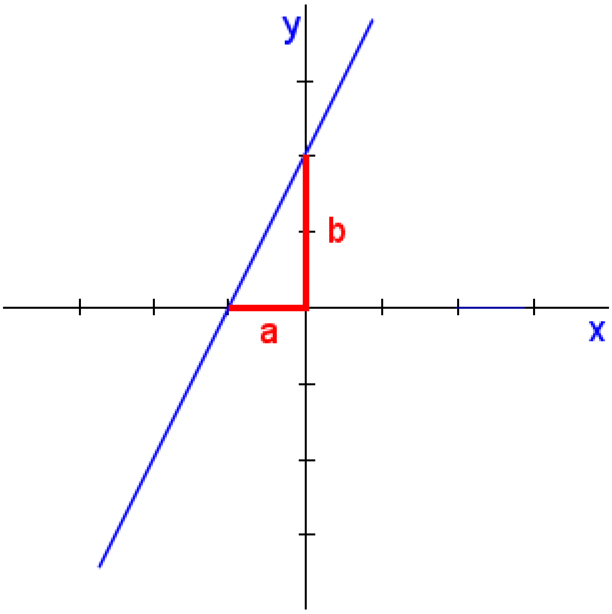
Die Achsenabschnitts-Form kann als Sonderform der zwei-Punkte-Form aufgefasst werden.
Die gegebenen Punkte (Px_1 | Py_1) und (Px_2 | Py_2) sind in diesem Fall (a | 0) und (0 | b).

Die Grundformel der Achsenabschnitts-Form lautet:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

nach y aufglöst:

$$y=-\frac{b}{a}x+b$$



Kurze Herleitung:
Einsetzen der Punkte (a | 0) und (0 | b) in die zwei-Punkte-Form ergibt:

$$y=0+-\frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

vereinfacht:

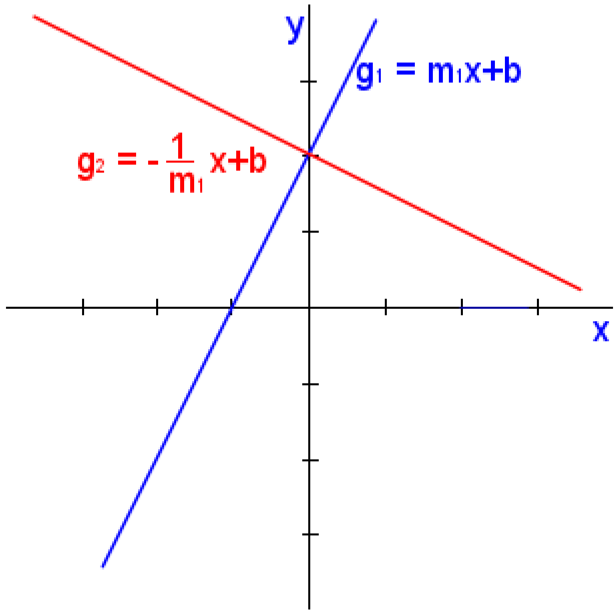
$$y=-b\left(\frac{x}{a}-1\right)$$

ausmultipliziert:

$$y=-\frac{b}{a}x+b$$

Gerade g_2 senkrecht zu einer gegebenen Geraden g_1

Um die Gleichung g_2 einer Senkrechten zu einer gegebenen Geraden zu bestimmen, bildet man den negativen Kehrwert der Steigung der gegebenen Geraden g_1.

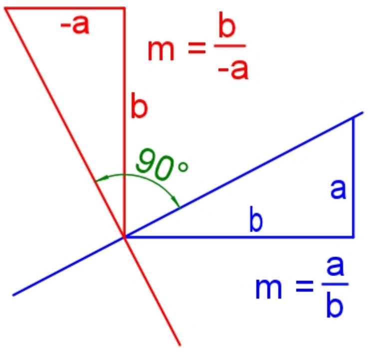


g_1: $y = mx + b$

die Gerade g_2, senkrecht zu g_1

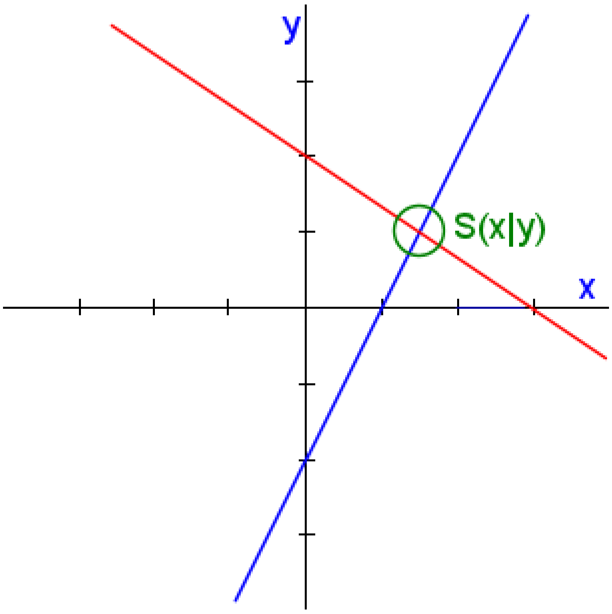
g_2: $y = -\frac{1}{m}x + b$

Kurzer Beweis:



Schnittpunkt zweier Geraden

Der Schnittpunkt zweier Geraden stellt die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten dar. Der Schnittpunkt erfüllt beide Gleichungen.



Um die Schnittpunkte zweier Geraden zu berechnen, muss man die Terme gleichsetzten.
(**Man darf Terme jedoch nur dann gleichsetzten, wenn diese auch wirklich gleich sind.**)

Beispiel:
Die Gleichungen y_1= 2x - 2 und y_2= -0,67x +2 sind gegeben (und nicht identisch!)

Gleichsetzen ergibt:

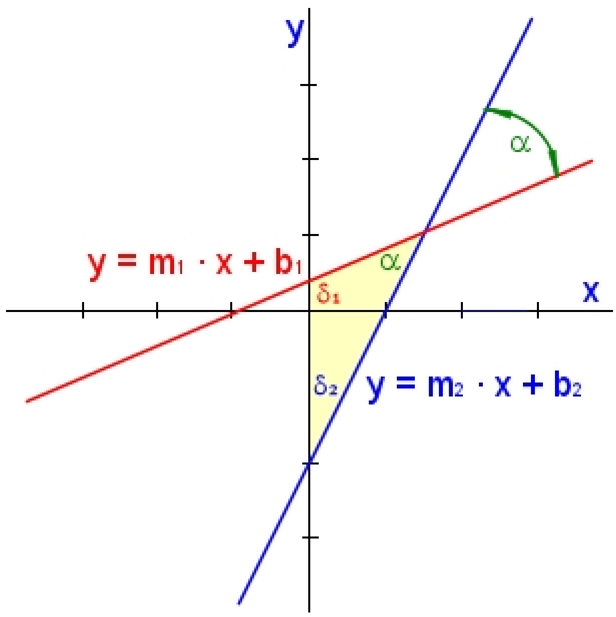
$$\mathbf{2x - 2 = - 0{,}67x + 2}$$
$$\mathbf{2{,}67x = 4}$$
$$\mathbf{x_S = 1{,}5}$$
$$\mathbf{y(1{,}5) = 2 \cdot 1{,}5 - 2}$$
$$\mathbf{y_S = 1}$$

Es gibt 3 Fälle für die Ebene:

- kein Schnittpunkt: Die Gerade schneiden sich nicht (y1= 2x - 2 , y2= 2x +2)
- genau ein Schnittpunkt: Die Geraden schneiden sich (y1= 2x - 2 , y2= x)
- unendlich viele "Schnittpunkte": Die Geraden sind identisch (y= 2x - 2 , 6y= 12x - 12)

Schnittwinkel zweier Geraden

Der Schnittwinkel zweier Geraden lässt sich aus der Differenz der beiden Steigungswinkel bestimmen.



$$a = \arctan m_2 - \arctan m_1$$

Kurzer Beweis:

Für das gelb unterlegte Dreick gilt:

$$d_1 = 90° + \arctan m_1$$
$$d_2 = 90° - \arctan m_2$$

Aus der Winkelsumme im Dreieck:

$$a = 180° - d_1 - d_2$$

eingesetzt:

$$a = 180° - (90° + \arctan m_1) - (90° - \arctan m_2)$$
$$a = 180° - 90° - 90° - \arctan m_1 + \arctan m_2$$
$$a = \arctan m_2 - \arctan m_1$$

Alles auf einen Blick

<table>
<tr><th>Form</th><th>Formel</th><th>Beschreibung</th></tr>
<tr><td>Grundform</td><td>$y = mx + b$</td><td>Die Grundform einer lineraren Funktion.
Sie gilt grundsätzlich für alle Geraden</td></tr>
<tr><td>Steigung</td><td>$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</td><td><table>
<tr><td>y = b</td><td>Parallele zur x-Achse im Abstand b</td></tr>
<tr><td>y = 0</td><td>Die x-Achse</td></tr>
<tr><td>m > 0</td><td>linear steigend</td></tr>
<tr><td>m < 0</td><td>linear fallend</td></tr>
<tr><td>x = a</td><td>Parallele zur y-Achse im Abstand a</td></tr>
<tr><td>x = 0</td><td>Die y-Achse</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Steigungswinkel</td><td>$a = \arctan m$</td><td>Der Steigungswinkel α einer Geraden ist der Winkel zwischen der positiven Abszisse und dem Graphen der Funktion.
α wird aus der Steigung m bestimmt.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Punkt-Steigung</td><td>$m = \frac{y - y_A}{x - x_A}$</td><td rowspan="3">Die Punkt-Steigungs-Form kann verwendet werden, wenn ein Punkt (Px | Py) und die Steigung m gegeben sind bzw. aus der Aufgabenstellung bestimmt werden können.</td></tr>
<tr><td>$y = mx + \left(y_A - mx_A\right)$</td></tr>
<tr><td>$b = \left(y_A - mx_A\right)$</td></tr>
<tr><td>Punkt-Winkel</td><td>$y = \tan a \cdot x + \left(y_A - \tan a \cdot x_A\right)$</td><td>Sonderform der Punkt-Steigungs-Form; gilt, wenn der Steigungswinkel α und nicht die Steigung m gegeben ist</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Zwei-Punkt</td><td>$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$</td><td rowspan="2">Die zwei-Punkte-Form kann verwendet werden, wenn zwei Punkte (Px_1 | Py_1) und (Px_2 | Py_2) gegeben sind bzw. aus der Aufgabenstellung bestimmt werden können.</td></tr>
<tr><td>$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(x - x_1\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Achsenabschnitt</td><td>$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$</td><td rowspan="2">Die Achsenabschnitts-Form kann als Sonderform der zwei-Punkte-Form aufgefasst werden.
Die gegebenen Punkte (Px_1 | Py_1) und (Px_2 | Py_2) sind in diesem Fall (a | 0) und (0 | b).</td></tr>
<tr><td>$y = -\frac{b}{a}x + b$</td></tr>
<tr><td>Senkrechte</td><td>$m_2 = -\frac{1}{m_1}$</td><td>Um die Gleichung g_2 einer Senkrechten zu einer gegebenen Geraden zu bestimmen, bildet man den negativen Kehrwert der Steigung der gegebenen Geraden g_1.</td></tr>
<tr><td></td><td>Schnittpunkt</td><td>Der Schnittpunkt zweier Geraden stellt die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten dar. Die Lösung ergibt die Koordinaten des Schnittpunktes.
Man wendet die (hoffentlich) bekannten Verfahren wie «Gleichsetzen», «Einsetzen» o.ä. an.</td></tr>
<tr><td>Schnittwinkel</td><td>$a = \arctan m_2 - \arctan m_1$</td><td>Der Schnittwinkel zweier Geraden wird aus der Differenz der beiden Steigungswinkel bestimmt.</td></tr>
</table>